Проблемы физики, математики и техники, № 2 (19), 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ca-$\mathfrak{F}$ ГРУППАХ

Е.Н. Мысловец

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON FINITE ca-$\mathfrak{F}$-GROUPS

E.N. Myslovets

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Конечная группа G называется ca-$\mathfrak{F}$-группой, если каждый ее абелевый главный фактор $\mathfrak{F}$-централен, а каждый неабелевый главный фактор является простой группой. Установлено, что класс всех ca-$\mathfrak{F}$-групп образует композиционную формацию. Исследованы свойства произведений нормальных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп конечных групп.

***Ключевые слова**: конечная группа, ca-$\mathfrak{F}$-группа, композиционная формация, радикальная формация, полурадикальная формация.*

Let $\mathfrak{F}$ be a class of groups. A finite group G is called a ca-$\mathfrak{F}$-group if its every abelian chief factor of G is $\mathfrak{F}$-central and every nonabelian chief factor of G is a simple group. It is established that the class of ca-$\mathfrak{F}$-groups forms a composite formation. The properties of the products of normal ca-$\mathfrak{F}$-subgroups of finite groups are investigated.

***Keywords**: finite group, ca-$\mathfrak{F}$-group, composition formation, radical formation, semiradical formation.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Центральными в теории классов групп являются концепции локальной и композиционной формации. Понятие локальной формации, введенное Гашюцем [1] в 1963 году, в настоящее время является классическим и активно применяется в исследовании различных вопросов теории групп и ее приложениях. Примерами локальных формаций являются классы всех разрешимых, нильпотентных и сверхразрешимых групп.

Определение композиционной формации было впервые введено Л.А. Шеметковым в [2] и Р. Бэром в неопубликованной работе [3, с. 370]. Каждая локальная формация является композиционной. Класс всех квазинильпотентных групп является примером композиционной формации, не являющейся локальной.

В 1988 году В.А. Ведерниковым в работе [4] был предложен целый ряд интересных классов групп и среди них класс $\mathfrak{U}_c$ всех c-сверхразрешимых групп и класс $\mathfrak{U}_{ca}$ всех ca-сверхразрешимых групп. Напомним, что группа G называется c-сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами, и ca-сверхразрешимой, если она является c-сверхразрешимой и каждый ее абелев фактор централен в G. Класс $\mathfrak{U}_c$ был подробно изучен в работе А.Ф. Васильева и Т.И. Васильевой [5]. В частности, было доказано, что класс $\mathfrak{U}_c$ является композиционной, но не локальной формацией. В работе [6] Д. Робинсоном были найдены структурные свойства c-сверхразрешимых групп.

Ввиду роста приложений композиционных формаций в различных вопросах теории групп возникает задача нахождения новых примеров и серий композиционных формаций. Так, в работах [7], [8] А.Н. Скибой и Го Вэньбинем была введена конструкция класса квази-$\mathfrak{F}$-групп, с помощью которой были получены новые примеры композиционных формаций, исследованы их свойства и приложения.

По аналогии с [7], [8] в настоящей работе введено понятие ca-$\mathfrak{F}$-группы. Доказано, что класс всех ca-$\mathfrak{F}$-групп является композиционной формацией, если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Установлены свойства групп, представимых в произведение своих нормальных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп.

1 Предварительные сведения

В работе используется обозначения и определения из монографий [2], [3], [9]. Приведем некоторые из них.

$H \rtimes K$ – полупрямое произведение групп H и K;

$\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп;

$\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп;

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп;

$G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G.

Формацией называется класс, замкнутый относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G/N \in \mathfrak{F}$, где $N \le \Phi(G)$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Экраном [2] называется отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^{\varphi}) \cap f(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

При этом экран f называется локальным, если он p-постоянен для любого простого p ($f(R) = f(S) = f(p)$ для любых двух неединичных p-групп R и S) и $f(G) = \cap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой группы $G \ne 1$. Экран f называется композиционным, если для любой группы $G \ne 1$ имеет место $f(G) = \cap f(H/K)$, где H/K пробегает все композиционные факторы группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран f, т. е.

$$\mathfrak{F} = \{G : G/C_G(H/K) \in f(p), \forall p \in \pi(H/K)\}.$$

Обозначается $\mathfrak{F} = LF(f)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется композиционной, если она имеет хотя бы один композиционный экран f, т. е.

$$\mathfrak{F} = \{G : G/C_G(H/K) \in f(A), \forall A \in K(H/K)\}.$$

Обозначается $\mathfrak{F} = CLF(f)$.

***Теорема* 1.1** [3, теорема 4.6]. *Формация конечных групп насыщена тогда и только тогда, когда она локальна*.

Внутренним экраном формации $\mathfrak{F}$ называется такой экран f, что $f(G) \subseteq \langle f \rangle$ для любой неединичной группы G. Экран f называется максимальным внутренним локальным (композиционным) экраном формации $\mathfrak{F}$, если f является максимальным элементом множества всех внутренних локальных (композиционных) экранов формации $\mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется радикальным или классом Фитинга [2], если $\mathfrak{F}$ S_n-замкнут и R-замкнут, т. е. содержит всякую группу $G = HK$, где H и K – нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы в G.

***Теорема* 1.2** [2]. *Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ R-замкнута тогда и только тогда, когда для любого просто p формация $f(p)$ R-замкнута*.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется полурадикальным [10], если $\mathfrak{F}$ S_n-замкнут и содержит всякую группу $G = HK$, где H и K – нормальные в G $\mathfrak{F}$-подгруппы такие, что G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

***Теорема* 1.3** [10]. *Пусть h – внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если полурадикален экран h, то полурадикальна формации $\mathfrak{F}$*;

2) *если полурадикальна формация $\mathfrak{F}$, то ее максимальный внутренний композиционный экран полурадикален*.

***Лемма* 1.4** [2]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$*.

***Лемма* 1.5** [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и N – минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^{\alpha}$ для некоторого простого числа p. Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора U/V группы N, то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$*.

2 Определение и свойства класса са-$\mathfrak{F}$-групп

***Определение* 2.1** [9]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-центральным, если*

$$H/K \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}.$$

В противном случае фактор H/K называется $\mathfrak{F}$-эксцентральным.

***Определение* 2.2**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Будем говорить, что группа G является са-$\mathfrak{F}$-группой, если каждый ее абелевый главный фактор является $\mathfrak{F}$-центральным, а каждый неабелевый главный фактор является простой группой.*

Класс всех *са*-$\mathfrak{F}$-групп обозначим через $\mathfrak{F}_{ca}$.

***Лемма* 2.3**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Тогда класс $\mathfrak{F}_{ca}$ является непустой формацией.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $N \lhd G$. Докажем, что G/N также является *са*-$\mathfrak{F}$-группой. Рассмотрим главный ряд группы G, проходящий через подгруппу N:

$$1 = G_1 < \ldots < G_i = N < G_{i+1} < \ldots < G_n = G.$$

Тогда любой главный фактор G_{j+1}/G_j является $\mathfrak{F}$-центральным, если он абелев, и изоморфен простой группе, если неабелев. Рассмотрим главный ряд группы G/N:

$$1 = G_i/N < G_{i+1}/N < \ldots < G_n/N = G/N.$$

В силу G-изоморфизма факторов

$$(G_{j+1}/N)/(G_j/N) \simeq G_{j+1}/G_j$$

любой главный фактор $(G_{j+1}/N)/(G_j/N)$ является либо $\mathfrak{F}$-центральным, либо изоморфен простой группе. Следовательно, G/N – *ca*-$\mathfrak{F}$-группа.

Пусть $G/N_1 \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}_{ca}$, $N_1 \lhd G$ и $N_2 \lhd G$. Из леммы 1.3 [2] следует, что любой главный фактор группы $G/(N_1 \cap N_2)$ G-изоморфен либо некоторому главному фактору группы G/N_1, либо некоторому главному фактору группы G/N_2. Отсюда следует, что группа $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}_{ca}$.

Следовательно, класс $\mathfrak{F}_{ca}$ является формацией. Лемма доказана.

***Теорема* 2.4**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация $\mathfrak{F}_{ca}$ является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N – простая неабелева группа и $h(N) = f(p)$, если N – простая p-группа, p – простое число*.

Доказательство. Пусть h – композиционный экран такой, что для любой простой группы N значение экрана $h(N) = f(p)$, если N – p-группа и $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N – неабелева группа. Обозначим через $\mathfrak{X} = CLF(h)$. Покажем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{ca}$.

Предположим, что множество $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}_{ca}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_{ca}$ являются формациями, то в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, которая совпадает с $\mathfrak{F}_{ca}$-корадикалом группы G, т. е. $N = G^{\mathfrak{F}_{ca}}$.

Пусть N – неабелева группа. Если $N = G$, то G – простая группа и $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие. Будем считать, что $N \neq G$. Заметим, что $C_G(N) \cap N \lhd G$. Из неабелевости и минимальности N следует, что $C_G(N) = 1$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $G/C_G(N) \simeq G \in h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором группы G.

Пусть N – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/C_G(N) \in h(N) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Рассмотрим полупрямое произведение $R = N \rtimes G/C_G(N)$. Заметим, что N – минимальная нормальная подгруппа в R и $C_R(N) = N = F(R) = F_p(R)$. Тогда $R/F_p(R) \simeq G/C_G(N) \in h(p)$. По лемме 1.4 получаем, что $R \in \mathfrak{F}$. То есть фактор $N/1$ является $\mathfrak{F}$-центральным в G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ получаем $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{ca}$.

Докажем обратное включение. Предположим, что множество $\mathfrak{F}_{ca} \setminus \mathfrak{X}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{F}_{ca}$ и $\mathfrak{X}$ – формации, то можно считать, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = G^{\mathfrak{X}}$.

Пусть N – неабелева группа. Тогда $C_G(N) = 1$. Из $G/C_G(N) \simeq G \in \mathfrak{F}_{ca} = h(N)$, следует, что главный фактор N является h-центральным в G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{X}$ получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие с выбором G.

Пусть N – абелева p-группа для некоторого простого p. Так как $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, то N – $\mathfrak{F}$-центральна в G. Следовательно,

$$R = N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F},$$

где N – минимальная нормальная подгруппа в R и $C_G(N) = N = F(R) = F_p(R)$. По лемме 1.4 получаем, что $R/F_p(G) \simeq G/C_G(N) \in h(p)$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_{ca} \subseteq \mathfrak{X}$, тем самым равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{ca}$ установлено. Теорема доказана.

3 Свойства произведений нормальных ca-$\mathfrak{F}$-подгрупп

Установим свойства групп, представимых в произведение своих нормальных *ca*-$\mathfrak{F}$-подгрупп. Для этого нам потребуется следующие леммы.

***Лемма* 3.1**. *Пусть группа G имеет неабелеву единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Если $G = HK$, где H и K – нормальные ca-$\mathfrak{F}$-подгруппы из G, то $G \in \mathfrak{F}_{ca}$.*

Доказательство. Заметим, что $N \subseteq H \cap K$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы H, содержащаяся в N. Так как $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то R – простая неабелева группа. Прямой проверкой устанавливается, что $R^g \lhd H$ для любого $g \in G$. Из $N \lhd G$ следует, что произведение $R^x R^y \ldots R^z \subseteq N$, где $x, y, \ldots, z$ – все элементы группы G. Из минимальности N получаем $N = R^x R^y \ldots R^z$. Выберем элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ группы G так, чтобы $N = R^{g_1} R^{g_2} \ldots R^{g_n}$ и $R^{g_i} \neq R^{g_j}$ для любых $i \neq j$. Ввиду простоты R имеем $R^{g_i} \cap R^{g_j} = 1$ для $i \neq j$, т. е.

$$N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times \ldots \times R^{g_n}.$$

Аналогично, минимальная нормальная подгруппа L группы K, содержащаяся в N, обладает следующими свойствами: L – простая неабелева группа; $L^h \lhd K$ для любого $h \in G$;

$$N = L^{h_1} \times L^{h_2} \times \ldots \times L^{h_m},$$

где $h_1, h_2 \ldots h_m$ – элементы группы G такие, что $L^{h_i} \neq L^{h_j}$ для любых $i \neq j$. Ввиду утверждения а) леммы 13.16 [11, гл. X] и простоты L для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ имеем $L^{h_i} = R^{g_k}$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда из

$$N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times \ldots \times R^{g_n} = L^{h_1} \times L^{h_2} \times \ldots \times L^{h_m}$$

получаем, что $n = m$, т. е.

$$\{R^{g_1} R^{g_2} \ldots R^{g_n}\} = \{L^{h_1} L^{h_2} \ldots L^{h_m}\}.$$

Так как $L^{h_1} = R^{g_k}$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то $N_G(L^{h_1}) = N_G(R^{g_k}) \supseteq HK = G$. Это означает, что $L^{h_1} \lhd G$. Отсюда и из минимальности N следует равенство $N = L^{h_1}$, т. е. N проста. Так как $G / N \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Лемма доказана.

***Лемма* 3.2**. *Если локальная формация $\mathfrak{F}$ является S_n-замкнутой, то и формация $\mathfrak{F}_{ca}$ также S_n-замкнута.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ и в G существует нормальная подгруппа R, которая не принадлежит $\mathfrak{F}_{ca}$. Выберем минимальную нормальную подгруппу N группы G, содержащуюся в R. По индукции $R / N \in \mathfrak{F}_{ca}$.

Пусть N – абелева p-группа для некоторого простого p. Так как $N \leftthreetimes G / C_G(N) \in \mathfrak{F}$ и формация $\mathfrak{F}$ является S_n-замкнутой, то $N \in \mathfrak{F}$ и

$$G / C_G(N) \in h(p),$$

где h – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является S_n-замкнутой, то по теореме 4.7 из [2] формация $h(p)$ также S_n-замкнута. Тогда

$$RC_G(N) / C_G(N) \simeq R / C_R(N) \in h(p).$$

Нетрудно видеть, что любой главный фактор группы R, лежащий в R, является h-центральным в R, а следовательно и $\mathfrak{F}$-центральным в R. Отсюда и из $R / N \in \mathfrak{F}_{ca}$ следует, что $R \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

Если N – неабелева группа, то N – простая группа, так как $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Тогда $R \in \mathfrak{F}_{ca}$. Данное противоречие завершает доказательство леммы.

***Лемма* 3.3**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная полурадикальная формация. Если группа $G = HK$, где H и K – нормальные в G ca-$\mathfrak{F}$-подгруппы такие, что G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, то G также является ca-$\mathfrak{F}$-группой.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка для которой утверждение леммы неверно. Обозначим через N – минимальную нормальную подгруппу группы G.

Покажем, что для G / N условия леммы выполняются. Рассмотрим

$$G / N = HN / N \cdot KN / N,$$

где $HN / N \lhd G$ и $KN / N \lhd G$. Группы

$$G / N / HN / N \simeq G / HN$$

и $G / N / KN / N \simeq G / KN$ не имеют общих абелевых композиционных факторов. По выбору группы G факторгруппа $G / N \in \mathfrak{F}_{ca}$.

Покажем, что N является единственной минимальной подгруппой в G. Предположим, что в G есть минимальная нормальная подгруппа $R \neq N$. Так как $\mathfrak{F}_{ca}$ является формацией из $G / R \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $G / N \in \mathfrak{F}_{ca}$ следует, что

$$G / R \cap N \in \mathfrak{F}_{ca}.$$

Из того, что R и N – минимальные нормальные подгруппы в G, следует, что $R \cap N = 1$ и $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие.

Таким образом, N – единственная минимальная подгруппа, причем $N = G^{\mathfrak{F}_{ca}}$ и $N \subseteq H \cap K$.

Пусть N – абелева p-группа для некоторого простого числа p. Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран h формации $\mathfrak{F}_{ca}$. Для любого H-главного фактора U / V группы N имеем

$$H / C_H(U / V) \in h(U / V) = h(p).$$

По лемме 1.5 имеем $H / C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Аналогично $K / C_K(N) \in h(p)$. Рассмотрим группу

$$G / C_G(N) = HC_G(N) / C_G(N) \cdot KC_G(N) / C_G(N).$$

Тогда ее нормальные подгруппы

$$HC_G(N) / C_G(N) \simeq H / C_H(N) \in h(p)$$

и $KC_G(N) / C_G(N) \simeq K / C_K(N) \in h(p)$. Из теоремы 1.3 и из того, что $G / C_G(N) / HC_G(N) / C_G(N)$ и $G / C_G(N) / KC_G(N) / C_G(N)$ не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, следует, что $G / C_G(N) \in h(p)$. Следовательно, N является h-центральным фактором группы G. Отсюда и из $G / N \in \mathfrak{F}_{ca}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

Если N – неабелева группа, то из леммы 3.1 следует, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие доказывает лемму.

***Лемма* 3.4**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная радикальная формация. Если группа $G = HK$, где H и K – нормальные в G ca-$\mathfrak{F}$-подгруппы, то G также является ca-$\mathfrak{F}$-группой.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.3.

***Теорема* 3.5**. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная радикальная формация. Тогда* $\mathfrak{F}_{ca}$ *– радикальная формация.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 3.2 и 3.4.

***Теорема* 3.6**. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная полурадикальная формация. Тогда* $\mathfrak{F}_{ca}$ *– полурадикальная формация.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 3.2 и 3.3.

***Следствие* 3.7**. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– разрешимая насыщенная формация. Если группа* $G = HK$, *где* H *и* K *– нормальные* ca*-*$\mathfrak{F}$*-подгруппы из* G *и* $(|G:H|,|G:K|)=1$, *то* G *является* ca*-*$\mathfrak{F}$*-группой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaschütz*, *W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschutz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

4. *Ведерников*, *В.А.* О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // Доклады АН БССР. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 872–875.

5. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Известия вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.

6. *Robinson*, *D.J.S.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–149.

7. *Guo*, *W.* On finite quazi-$\mathfrak{F}$-groups / W. Guo, A.N. Skiba // Communication in Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.

8. *Guo*, *W.* On some classes of finite quazi-$\mathfrak{F}$-groups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.

9. *Шеметков*, *Л.Н.* Формации алгебраических систем / Л.Н. Шеметков, А.Н. Скиба // М. : Наука, 1989 – 256 с.

10. *Васильева*, *Т.И.* Полурадикальные формации конечных групп / Т.И. Васильева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – Т. 1, № 1 (15). – С. 71–77.

11. *Huppert*, *B.* Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin : Springer, 1982. – 454 p.

Поступила в редакцию 21.10.13.